四庫全書

子部

御製數理精蘊下編卷二十五

體部三

各體形總論

直線體

各體形總論

體之為形成於面面面之相合為厚角故凡體形皆自厚角所合而生面之所合不能成厚角則體亦不能成形惟渾圓則無角然求積之法亦合衆尖體而成渾圓是雖無角而實賴於角也方體有正方斜方尖方方環陽馬塹堵之異圓體則有渾圓長圓尖圓之殊至於各等面體惟成於三角四角五角之面而兼盡乎方圓之理亟於圓者其角切於球之外面亟圓者球之外面切於各面之中心而各體又有互相容

之妙因其各面皆等故其中心至每邊之線皆同就其各形而分視之則成各等邊面形因其各形而細剖之則成各同底尖體形然求積總以勾股為準則蓋體成於面面生於線理固然也有積求邊則必以方圓為比例是以邊線等者體積不等如圓球徑與各等面體之一邊俱設為一〇〇〇則正方體積為一〇〇〇〇〇〇〇〇〇圓球體積為五二三五九八七七五四面體積為一一七八五一一二九八面體積為四七一四〇四五二一十二面體積為七六

六三一一八九○三二十面體積為二一八一六九四九六九此各形之體積皆以方積比例者也或以圓球體積設為一○○○○○○○○○則圓球徑得一二四○小餘七○○九八如圓球徑與各等面體之一邊俱設為一二四○小餘七○○九八則圓球體積為一○○○○○○○○○正方體積為一九○九八五九三一七四面體積為二二五○七九○七七八面體積為九○○三一六三一七十二面體積為一四六三五四七九○五一二十面體積為

四一六六七三〇四六三此各形之體積皆以球積比例者也葢因各形之邊線相等體積不同故皆定為體與體之比例也體積等者邊線不等如圓球體積與各等面體積俱設為一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇則正方體之每邊為一〇〇〇〇〇〇〇〇而圓球徑為一二四〇七〇〇九八四面體之每邊為二〇三九六四八九〇八面體之每邊為一二八四八九八二九十二面體之每邊為五〇七二二二〇七二十面體之每

邊為七七一〇二五三四此各形之邊線皆以方邊比例者也或以圓球徑設為一〇〇〇〇〇〇〇則圓球體積為五二三五九八七七五五九八二九八八七三〇七一九二三如圓球體積與各等面體積俱設為五二三五九八七七五五九八二九八八七三〇七一九二三則圓球徑為一〇〇〇〇〇〇〇〇〇正方體之每邊為八〇五九九五九七四面體之每邊為一六四三九四八八一八面體之每邊為一〇三五六二二八五十二面體之每邊為四〇八

八一八九五二十面體之每邊為六二一四四三三二此各形之邊線皆以球徑比例者也葢因各形之體積相等邊線不同故皆定為線與線之比例也要之邊求積者亦皆本於勾股而積求邊者一皆歸之正方此方所以為立法之原入算之本也

直線體

設如正方體每邊二尺今將其積倍之問得方邊幾何

法以每邊二尺自乘再乘得八尺倍之得一十六尺開立方得二尺五寸一分有餘即所求之方邊數也如圖甲乙丙丁正方體每邊二尺其體積八尺倍之得一十六尺即如戊己庚辛正方體積每邊得二尺五寸一分有餘試於戊己

庚辛正方體形內作甲乙丙丁正方體形則其外之戊己乙甲壬丁丙庚辛癸磬折體形即與甲乙丙丁正方體積相等也

設如正方體每邊二尺今將其積八倍之問得方邊幾何

法以每邊二尺倍之得四尺即所求之方邊數也如圖甲乙丙丁正方體每邊二尺其體積八尺八倍之得六十四尺

即如戊己庚辛正方體積其每邊得甲乙丙丁正方形每邊之二倍是故不用八倍其積開立方止以每邊二尺倍之而即得也此法葢因兩體積之比例比之兩界之比例為連比例隔二位相加之比例見幾何原本十卷第四節故戊己庚辛正方體積六十四尺與甲乙丙丁正方體積之八尺相比為八分之一而戊己庚辛正方邊之四尺與甲乙丙丁正方邊之

二尺之比為二分之一夫六十四與三十二三十二與十六十六與八八與四四與二皆為二分之一之連比例而六十四與八之比其間隔三十二與十六之兩位故為連比例隔二位相加之比例也

設如長方體長一尺二寸闊八寸高四寸今將其積倍之仍與原形為同式形問得長闊高各幾何

法以長一尺二寸自乘再乘得一尺七

百二十八寸倍之得三尺四百五十六寸開立方得一尺五寸一分一釐有餘即所求之長既得長乃以原長一尺二寸為一率原闊八寸為二率今所得之長一尺五寸一分一釐有餘為三率求得四率一尺零七釐有餘即所求之闊也又以原長一尺二寸為一率原高四寸為二率今所得之長一尺五寸一分一釐有餘為三率求得四率五寸零三

釐有餘即所求之高也或以闊八寸自乘再乘倍之開立方亦得一尺零七釐有餘為所求之闊以高四寸自乘再乘倍之開立方亦得五寸零三釐有餘為所求之高也如圖甲乙丙丁長方體甲乙高四寸丁戊闊八寸甲戊長一尺二寸將其積倍之即如己庚辛壬長方體此兩長方體積之比例即同於其相當二界各作兩正方體積之比例見幾何原本十

故依甲乙丙丁長方體之甲戊長界作甲戊丑子正方體將其積倍之即如巳庚辛壬長方體之巳癸長界所作之巳癸卯寅正方體故開立方得巳癸為所求之長也既得巳癸之長則以甲戊與丁戊之比即同於巳癸與壬癸之比得壬癸為所求之闊又甲戊與甲乙之比同於巳癸與巳庚之比得巳庚為所求之高也若以原闊自乘再乘倍之

開立方亦得一尺零七釐有餘為今所求之闊原高自乘再乘倍之開立方亦得五寸零三釐有餘為今所求之高皆如以其相當二界各作正方體互相為比之理也

設如長方體長一尺二寸闊八寸高四寸今將其積八倍之仍與原形為同式形問得長闊高各幾何

法以長一尺二寸倍之得二尺四寸即所求之長又以原闊八寸倍之得一尺

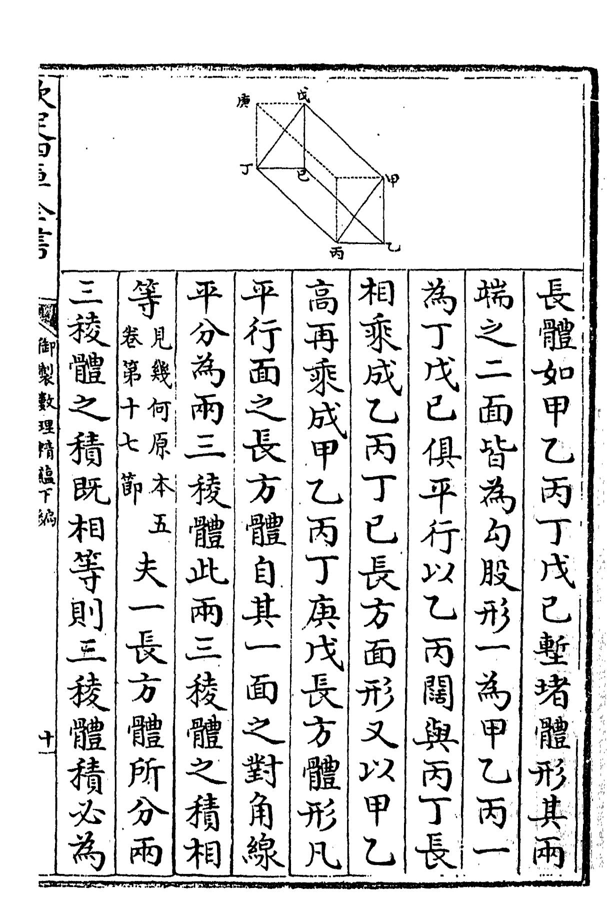
六寸即所求之闊又以原高四寸倍之得八寸即所求之高也如圖甲乙丙丁長方體甲乙高四寸丁戊闊八寸甲戊長一尺二寸將其積八倍之即如巳庚辛壬長方體其每邊得甲乙丙丁長方體每邊之二倍是故不用八倍其積開立方止以各邊之數倍之而即得也此法蓋因兩長方體之比例既同於其相當二界各作正方體之比例而兩正方

體之比例比之二界之比例為連比例隔二位相加之比例故兩長方體積之比例較之兩體各界之比例亦為連比例隔二位相加之比例也

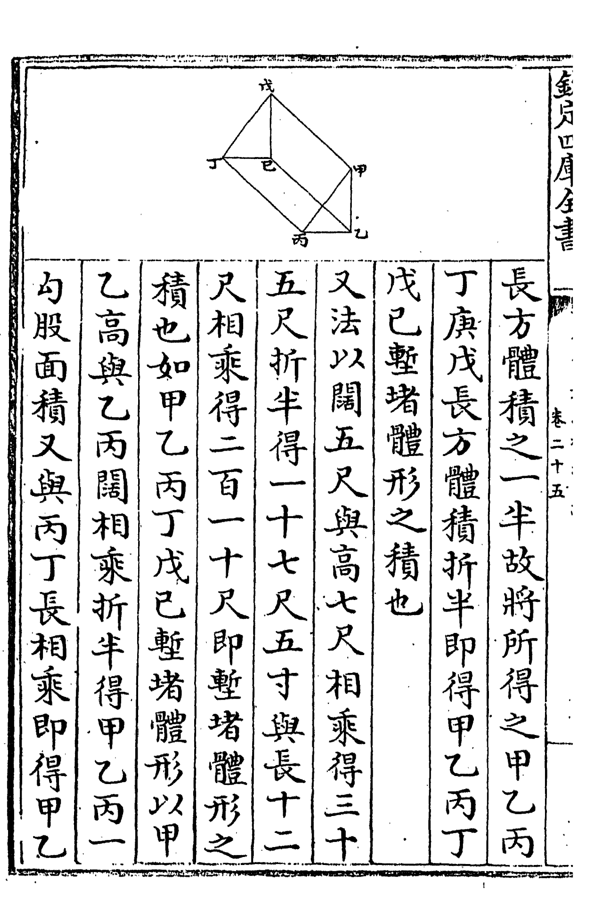
設如塹堵體形闊五尺長十二尺高七尺問積幾何

法以闊五尺與長十二尺相乘得六十尺又以高七尺再乘得四百二十尺折半得二百一十尺即塹堵體形之積也

蓋塹堵體形即平行二勾股面之三稜



長體如甲乙丙丁戊己塹堵體形其兩端之二面皆為勾股形一為甲乙丙一為丁戊己俱平行以乙丙闊與丙丁長相乘成乙丙丁己長方面形又以甲乙高再乘成甲乙丙丁庚戊長方體形凡平行面之長方體自其一面之對角線平分為兩三稜體此兩三稜體之積相等見幾何原本五卷第十七節夫一長方體所分兩三稜體之積既相等則三稜體積必為



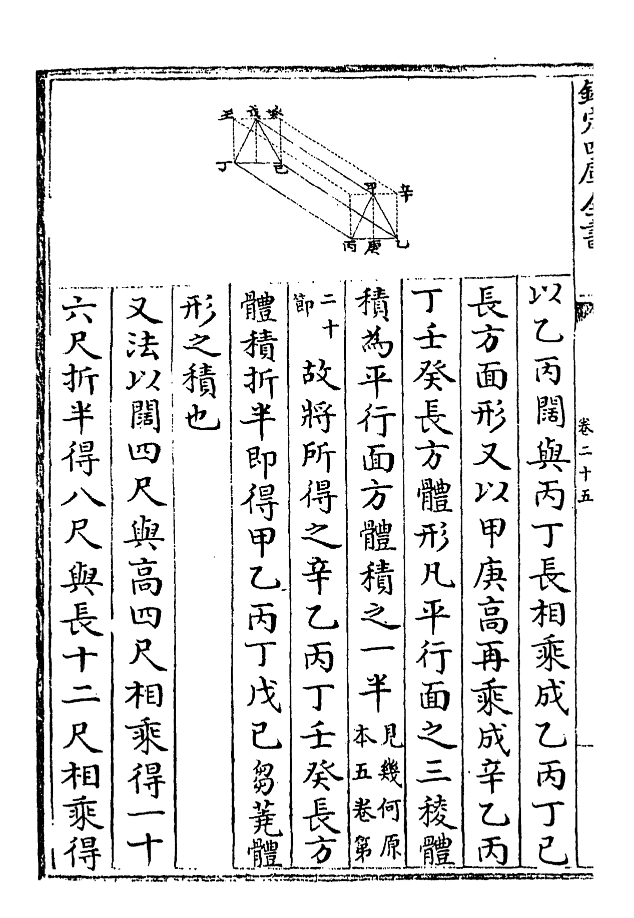
長方體積之一半故將所得之甲乙丙丁庚戊長方體積折半即得甲乙丙丁戊己壍堵體形之積也

又法以闊五尺與高七尺相乘得三十五尺折半得一十七尺五寸與長十二尺相乘得二百一十尺即壍堵體形之積也如甲乙丙丁戊己壍堵體形以甲乙高與乙丙闊相乘折半得甲乙丙一勾股面積又與丙丁長相乘即得甲乙

丙丁戊己塹堵體形之積也

設如芻蕘體形闊四尺長十二尺高四尺問積幾何

法以闊四尺與長十二尺相乘得四十八尺又與高四尺相乘得一百九十二尺折半得九十六尺即芻蕘體形之積也蓋芻蕘體形即平行兩三角面之三稜長體（有直角為塹堵體無直角為芻蕘體）如甲乙丙丁戊己芻蕘體形其兩端之二面皆為三角形一為甲乙丙一為丁戊己俱平行



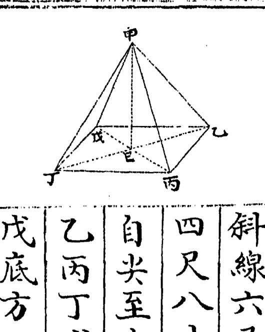
以乙丙闊與丙丁長相乘成乙丙丁己長方面形又以甲庚高再乘成辛乙丙丁壬癸長方體形凡平行面之三稜體積為平行面方體積之一半（見幾何原本五卷第二十節）故將所得之辛乙丙丁壬癸長方體積折半即得甲乙丙丁戊己芻甍體形之積也

又法以闊四尺與高四尺相乘得一十六尺折半得八尺與長十二尺相乘得

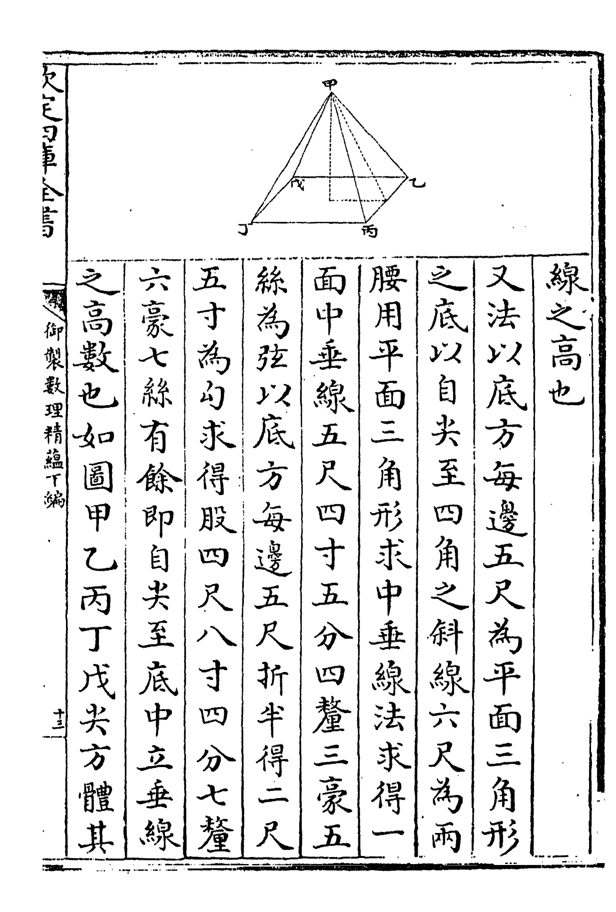
九十六尺即芻甍體形之積也如甲乙丙丁戊己芻甍體形以乙丙闊與甲庚高相乘折半得甲乙丙三角形面積又與丙丁長相乘即得甲乙丙丁戊己芻甍體形之積也

設如方底尖體形底方每邊五尺自尖至四角之斜線皆六尺問自尖至底中立垂線之高幾何

法以底方每邊五尺求對角斜線法求得底方對角斜線七尺零七分一釐零



六絲有餘折半得三尺五寸三分五釐五豪三絲有餘為勾以自尖至四角之斜線六尺為弦用勾弦求股法求得股四尺八寸四分七釐六豪八絲有餘即自尖至底中立垂線之高數也如圖甲乙丙丁戊方底尖體形先求得乙丙丁戊底方面之乙丁對角斜線折半於已得乙已為勾以自尖至角之甲乙斜線為弦求得甲已股即自尖至底中立垂



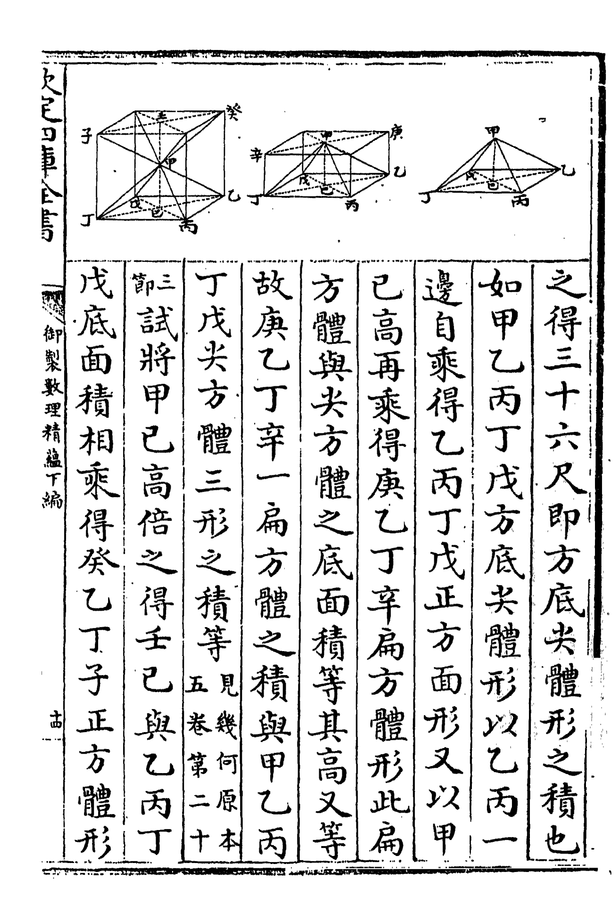
線之高也

又法以底方每邊五尺為平面三角形之底以自尖至四角之斜線六尺為兩腰用平面三角形求中垂線法求得一面中垂線五尺四寸五分四釐三豪五絲為弦以底方每邊五尺折半得二尺五寸為勾求得股四尺八寸四分七釐六豪七絲有餘即自尖至底中立垂線之高數也如圖甲乙丙丁戊尖方體其

四面皆為平面三角形一為甲乙丙一為甲丙丁一為甲丁戊一為甲戊乙任以甲乙丙三角形之乙丙為底以甲乙甲丙為兩腰求得甲庚中垂線而以此甲庚為弦底邊折半得庚己為勾求得甲己股即自尖至底中立垂線之高也

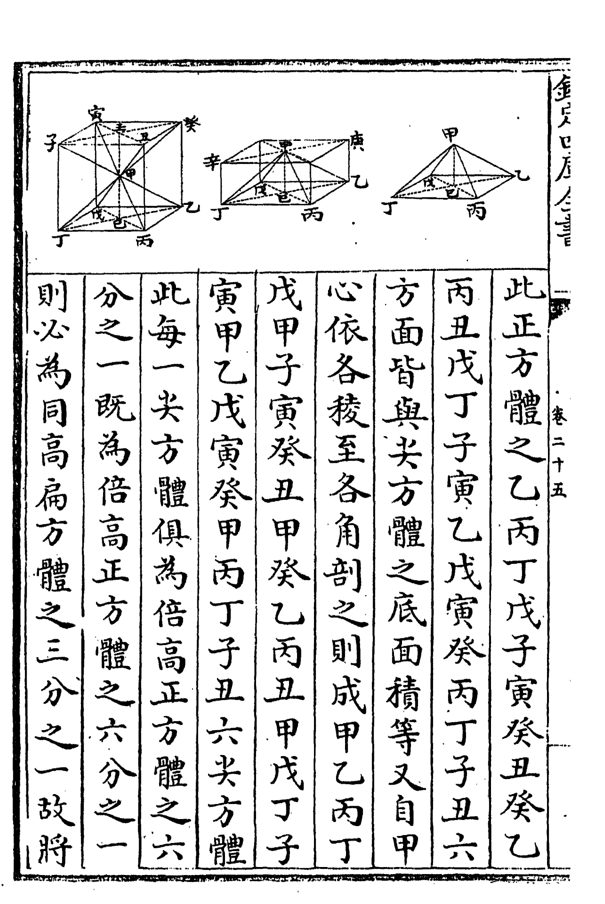
設如方底尖體形底方每邊六尺高三尺問積幾何

法以下方每邊六尺自乘得三十六尺又以高三尺再乘得一百零八尺三歸



之得三十六尺即方底尖體形之積也

如甲乙丙丁戊方底尖體形以乙丙一邊自乘得乙丙丁戊正方面形又以甲己高再乘得庚乙丁辛扁方體形此扁方體與尖方體之底面積等其高又等故庚乙丁辛一扁方體之積與甲乙丙丁戊尖方體三形之積等見幾何原本五卷第二十三節試將甲己高倍之得壬己與乙丙丁戊底面積相乘得癸乙丁子正方體形

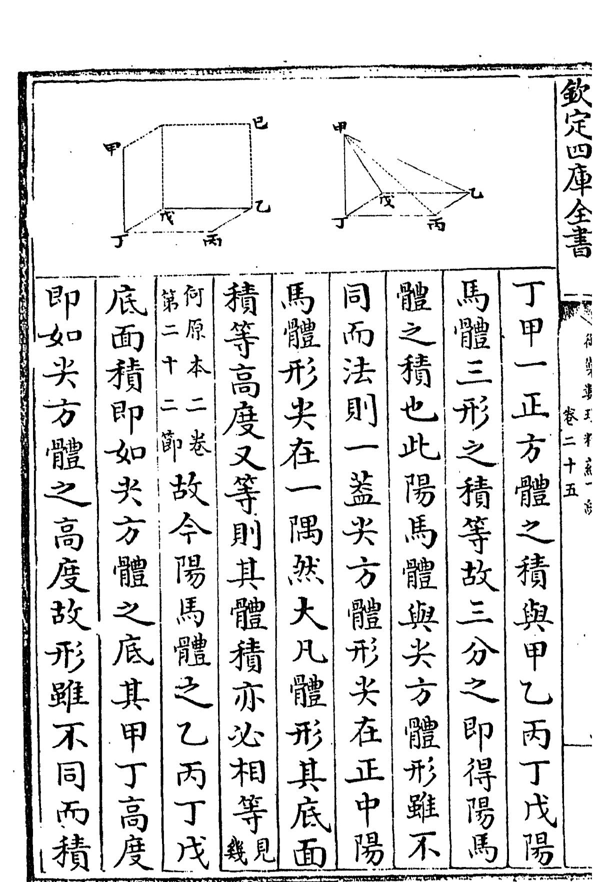


此正方體之乙丙丁戊子寅癸丑癸乙丙丑戊丁子寅乙戊寅癸丙丁子丑六方面皆與尖方體之底面積等又自甲心依各稜至各角剖之則成甲乙丙丁戊甲子寅癸丑甲癸乙丙丑甲戊丁子寅甲乙戊寅癸甲丙丁子丑六尖方體此每一尖方體俱為倍高正方體之六分之一既為倍高正方體之六分之一則必為同高扁方體之三分之一故將

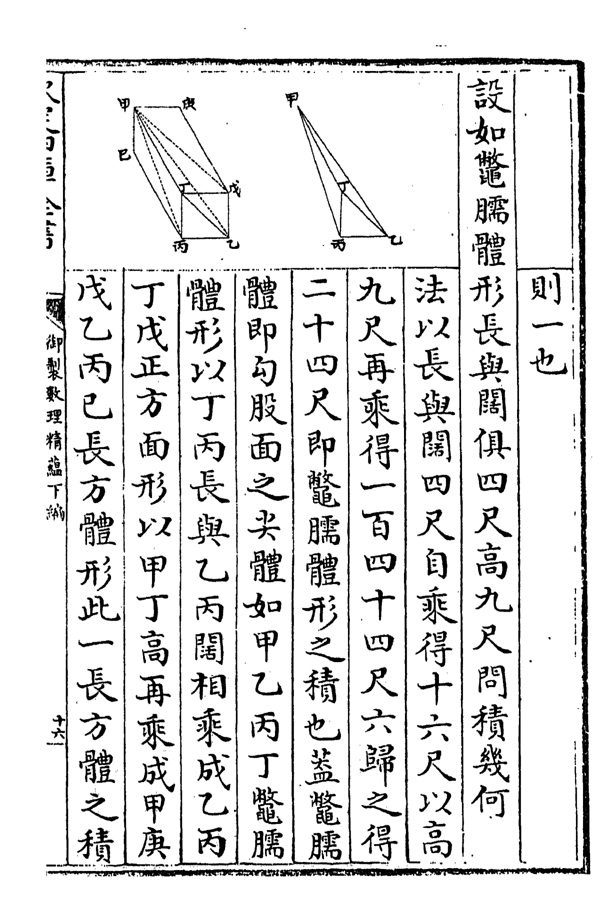
所得庚乙丁辛之同高方體積三分之
而得甲乙丙丁戊尖方體之積也

設如陽馬體形底方每邊六尺高亦六尺問積幾何

法以底方每邊六尺自乘得三十六尺
又以高六尺再乘得二百一十六尺三
歸之得七十二尺即陽馬體形之積也
如甲乙丙丁戊陽馬體形以乙丙一邊
自乘得乙丙丁戊正方面形又以甲丁
高再乘得巳乙丁甲正方體形此巳乙



丁甲一正方體之積與甲乙丙丁戊陽馬體三形之積等故三分之即得陽馬體之積也此陽馬體與尖方體形雖不同而法則一葢尖方體形尖在正中陽馬體形尖在一隅然大凡體形其底面積等高度又等則其體積亦必相等見幾何原本二卷第二十二節故令陽馬體之乙丙丁戊底面積即如尖方體之底其甲丁高度即如尖方體之高度故形雖不同而積



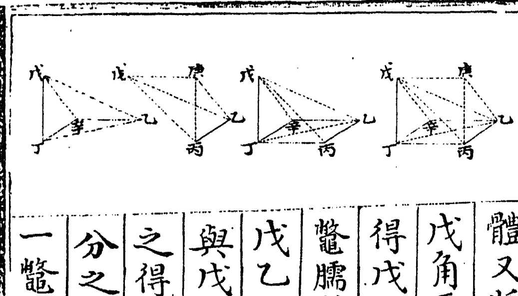
則一也

設如鼈臑體形長與闊俱四尺高九尺問積幾何

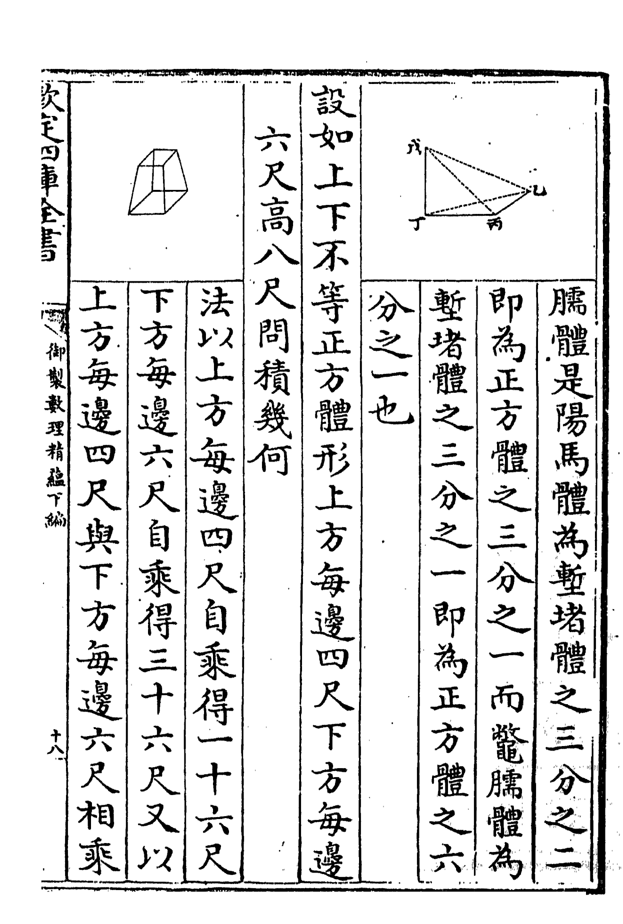
法以長與闊四尺自乘得十六尺以高九尺再乘得一百四十四尺六歸之得二十四尺即鼈臑體形之積也蓋鼈臑體即勾股面之尖體如甲乙丙丁鼈臑體形以丁丙長與乙丙闊相乘成乙丙丁戊正方面形以甲丁高再乘成甲庚戊乙丙己長方體形此一長方體之積

與甲戊乙丙丁陽馬體三形之積等而甲乙丙丁鼈臑體之積又為甲戊乙丙丁陽馬體積之一半葢各類尖體其底面積等其高又等則其體積亦等見幾何原本二卷第二十二節今甲乙丙丁鼈臑體之乙丙丁底積為甲戊乙丙丁陽馬體之乙丙丁戊底面積之一半則甲乙丙丁鼈臑體積亦必為甲戊乙丙丁陽馬體積之一半鼈臑體既為陽馬體之一半而陽

馬體又為長方體之三分之一則鼈臑體必為長方體之六分之一故將所得甲庚戊乙丙己長方體積六分之即得甲乙丙丁鼈臑體之積也又凡正方體或長方體按法剖之即成塹堵陽馬鼈臑各體而自得其相比之率也如圖甲乙丙丁戊己正方體自其庚乙一面對角線至對面戊辛對角斜線平分之即得甲乙辛戊己與庚乙丙丁戊二塹堵



體又將庚乙丙丁戊塹堵體自其上稜戊角至乙對角依乙丙下稜斜剖之則得戊乙丙丁辛一陽馬體乙丙戊庚一鼈臑體又將戊乙丙丁辛陽馬體自其戊乙相對斜稜平分之則得戊乙丁辛與戊乙丙丁二鼈臑體夫一正方體剖之得二塹堵體是塹堵體為正方體二分之一也一塹堵體剖之得一陽馬體一鼈臑體而一陽馬體剖之又得二鼈



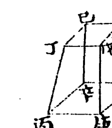
臑體是陽馬體爲塹堵體之三分之二即爲正方體之三分之一而鼈臑體爲塹堵體之三分之一即爲正方體之六分之一也

設如上下不等正方體形上方每邊四尺下方每邊六尺高八尺問積幾何

法以上方每邊四尺自乘得一十六尺下方每邊六尺自乘得三十六尺又以上方每邊四尺與下方每邊六尺相乘

得二十四尺三數相併得七十六尺與高八尺相乘得六百零八尺三歸之得二百零二尺六百六十六寸有餘即上下不等正方體形之積也如甲乙丙丁上下不等正方體形戊丁上方邊自乘得甲戊丁己正方面形庚丙下方邊自乘得乙庚丙辛正方面形戊丁上方邊與庚丙下方邊相乘得壬癸子丑長方面形將此三方面形相併與高八尺相

乘得三長方體形其一上下方面俱如甲戊丁己其一上下方面俱如乙庚丙辛其一上下方面俱如壬癸子丑葢乙庚丙辛長方體比甲戊丁己長方體多壬癸戊甲戊寅卯丁己丁子丑辰甲己巳四方廉體又多乙壬甲辰癸庚寅戊丁卯丙子巳己丑辛四長廉體而壬癸子丑長方體比甲戊丁己長方體多壬癸戊甲己丁子丑二方廉體若將共多



之六方廉體四長廉體俱截去則此三長方體之上下方面必皆如甲戊丁巳乃以每一方廉體變為二塹堵體每一長廉體變為三陽馬體共得十二塹堵體十二陽馬體將甲戊丁巳類三長方體各加四塹堵體四陽馬體則皆成上下不等三正方體故三歸之而得甲乙丙丁上下不等一正方體形之積也

又法以上方邊四尺與下方邊六尺相

減餘二尺折半得一尺為一率高八尺為二率下方邊六尺折半得三尺為三率求得四率二十四尺為上下不等正方體形上補成一尖方體之共高乃以下方邊六尺自乘得三十六尺與所得共高二十四尺相乘得八百六十四尺三歸之得二百八十八尺為大尖方體之積又以高八尺與共高二十四尺相減餘十六尺為上小尖方體之高以上

方邊四尺自乘得十六尺與上高十六尺相乘得二百五十六尺三歸之得八十五尺三百三十三寸有餘為上小尖方體之積與大尖方體積二百八十八尺相減餘二百零二尺六百六十六寸有餘即上下不等正方體形之積也如甲乙丙丁上下不等正方體形加戊甲丁小尖方體形遂成戊乙丙大尖方體形先以上方邊與下方邊相減折半如

己庚下方邊折半如己辛依勾股比例己庚與壬庚之比即同於己辛與戊辛之比以戊辛與乙丙下方面相乘三歸之得戊乙丙大尖方體積以戊癸與甲丁上方面相乘三歸之得戊甲丁小尖方體積於戊乙丙大尖方體積內減去戊甲丁小尖方體積所餘必甲乙丙丁上下不等正方體形之積也

設如上下不等長方體形上方長四尺闊三尺下方

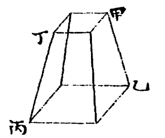
長八尺闊六尺高十尺問積幾何

法以上長四尺與上闊三尺相乘得十二尺倍之得二十四尺下長八尺與下闊六尺相乘得四十八尺倍之得九十六尺又以上闊三尺與下長八尺相乘得二十四尺以下闊六尺與上長四尺相乘得二十四尺四數相併得一百六十八尺與高十尺相乘得一千六百八十尺六歸之得二百八十尺即上下不

等長方體形之積也如甲乙丙丁上下不等長方體形戊丁上長與甲戊上闊相乘得一甲戊丁庚長方面形倍之得二甲戊丁庚長方面形己丙下長與乙己下闊相乘得一乙己丙辛長方面形倍之得二乙己丙辛長方面形甲戊上闊與己丙下長相乘得一壬癸子丑長方面形乙己下闊與戊丁上長相乘得一寅卯辰巳長方面形將此六長方面

形相併與高十尺相乘得六長方體形其二上下方面俱如甲戊丁庚其二上下方面俱如乙己丙辛其一上下方面俱如壬癸子丑其一上下方面俱如寅卯辰巳蓋二乙己丙辛長方體比二甲戊丁庚長方體為多二壬癸戊甲二戊卯辰丁二庚丁子丑二寅甲庚巳八方廉體又多二乙壬甲寅二癸巳卯戊二丁辰丙子二巳庚丑辛八長廉體而一

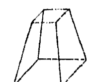
壬癸子丑長方體比一甲戊丁庚長方體多一壬癸戊甲一庚丁子丑二方廉體而一寅卯辰巳長方體比一甲戊丁庚長方體多一寅甲庚巳一戊卯辰丁二方廉體若將共多之十二方廉體八長廉體俱截去則此六長方體之上下方面必皆如甲戊丁庚乃以每一方廉體變為二塹堵體每一長廉體變為三陽馬體共得二十四塹堵體二十四陽



馬體將六長方體各加四塹堵體四陽馬體則皆成上下不等六長方體故六歸之而得甲乙丙丁上下不等長方體形之積也

又法以上長四尺倍之得八尺加下長八尺共十六尺與上闊三尺相乘得四十八尺又以下長八尺倍之得十六尺加上長四尺得二十尺與下闊六尺相乘得一百二十尺兩數相併得一百六

十八尺與高十尺相乘得一千六百八十尺六歸之得二百八十尺即上下不等長方體形之積也此法與前法同此法之以上長倍之加下長與上闊相乘之數即前法之上長上闊相乘倍之又加上闊與下長相乘之數也又此法之以下長倍之加上長與下闊相乘之數即前法之下長下闊相乘倍之又加下闊與上長相乘之數也圖解並同



又法以上長四尺與上闊三尺相乘得十二尺下長八尺與下闊六尺相乘得四十八尺又以上長四尺與下闊六尺相乘下長八尺與上闊三尺相乘共得四十八尺折半得二十四尺三數相併得八十四尺與高十尺相乘得八百四十尺三歸之得二百八十尺亦即上下不等長方體形之積也蓋此法與上下不等正方體求積之法同但正方體上

下俱係正方面故止用上下方邊各自乘上方邊與下方邊相乘此則上下方面各有長闊既用上方長闊相乘下方長闊相乘又必以上長乘下闊下長乘上闊相加折半以取中數乃可相併而與高數相乘三歸之而得體積也

又法以上長四尺與下長八尺相減餘四尺折半得二尺為一率高十尺為二率下長八尺折半得四尺為三率求得

四率二十尺為上下不等長方體形上補成一尖長方體之共高乃以下長八尺與下闊六尺相乘得四十八尺與所得共高二十尺相乘得九百六十尺三歸之得三百二十尺為大尖長方體之積又以高十尺與共高二十尺相減餘十尺為上小尖長方體之高以上長四尺與上闊三尺相乘得十二尺與上高十尺相乘得一百二十尺三歸之得四

十尺為上小尖長方體之積與大尖長方體積三百二十尺相減餘二百八十尺即上下不等長方體形之積也如甲乙丙丁上下不等長方體形加戊甲丁小尖長方體形遂成戊乙丙大尖長方體形先以上長與下長相減折半如己庚以下長折半如己辛依勾股比例己庚與壬庚之比即同於己辛與戊辛之比以戊辛與乙丙下長方面相乘三歸

之得戊乙丙大尖長方體積以戊癸與甲丁上長方面相乘三歸之得戊甲丁小尖長方體積於戊乙丙大尖體積內減去戊甲丁小尖體積所餘必甲乙丙丁上下不等長方體形之積也

設如上下不等芻甍體形上長十尺下長十四尺下闊五尺高十二尺問積幾何

法以上長十尺與下闊五尺相乘得五十尺以高十二尺再乘得六百尺折半

得三百尺為上下相等芻甍體積又以上長十尺與下長十四尺相減餘四尺與下闊五尺相乘得二十尺以高十二尺再乘得二百四十尺三歸之得八十尺與先所得上下相等芻甍體積三百尺相併得三百八十尺即上下不等芻甍體之積也如甲乙丙丁戊上下不等芻甍體形自其上稜之甲戊兩端直剖之則分為甲己辛壬戊一芻甍體甲乙

丙辛與戊庚壬丁二尖方體故以與上長相等之己庚與己辛闊（與乙丙等）相乘即得己辛壬庚芻蕘體之底面積與甲癸高相乘折半得甲己辛壬戊芻蕘體積又以甲戊上長與丙丁下長相減所餘丙辛壬丁二段即二尖方體之共長與乙丙闊相乘得乙辛與庚丁二尖方體之底面積與高相乘三歸之即得甲乙丙辛與戊庚壬丁二尖方體積與甲己

辛壬戊一芻甍積相加即得甲乙丙丁戊一上下不等芻甍體之總積也

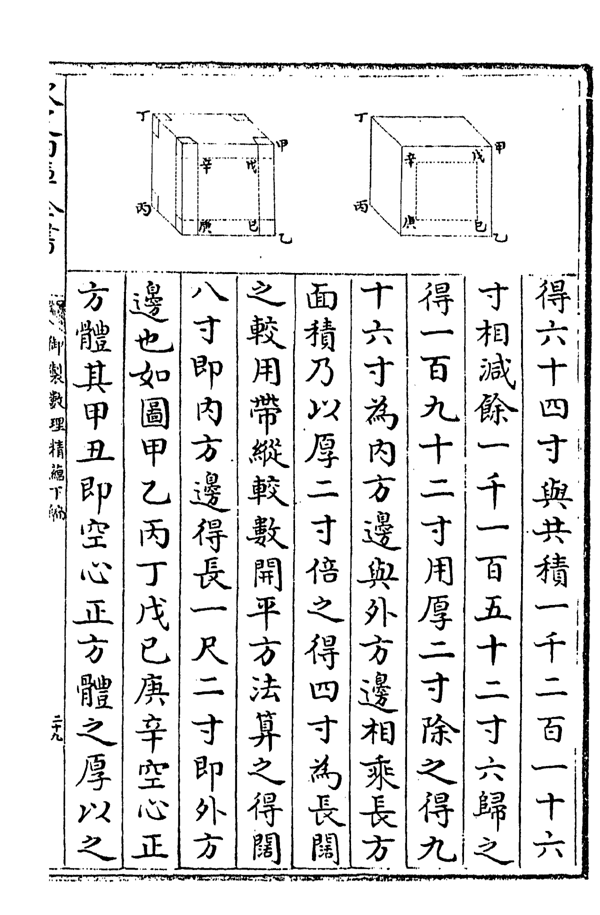
設如兩兩平行邊斜長方體形長二尺四寸闊八寸高三尺七寸問積幾何

法以長二尺四寸與闊八寸相乘得一尺九十二寸又以高三尺七寸再乘得七尺一百零四寸即兩兩平行邊斜長方體形之積也如圖甲乙丙丁戊己斜長方體形以乙丙闊與丙丁長相乘得

乙丙丁庚長方面積以戊丙高再乘成己乙丙丁辛壬長方體凡平行平面之間所有立於等積底之各平行體其積必俱相等（見幾何原本五卷第十九節）故甲乙丙丁戊己斜倚之長方體必與己乙丙丁辛壬正立之長方體為相等也

設如空心正方體積一千二百一十六寸厚二寸問內外方邊各幾何

法以厚二寸自乘再乘得八寸八因之



得六十四寸與共積一千二百一十六寸相減餘一千一百五十二寸六歸之得一百九十二寸用厚二寸除之得九十六寸為內方邊與外方邊相乘長方面積乃以厚二寸倍之得四寸為長闊之較用帶縱較數開平方法算之得闊八寸即內方邊得長一尺二寸即外方邊也如圖甲乙丙丁戊己庚辛空心正方體其甲丑即空心正方體之厚以之

自乘再乘八因之得壬辛子癸類八小隅體與空心正方體相減則餘空心正方體之六面丑寅巳子類六長方扁體六歸之得丑寅巳子一長方扁體用厚二寸除之得丑寅卯辰一長方面積其丑寅闊與戊己等即內方邊其丑辰長與甲乙等即外方邊其丑戊辛辰皆與甲丑厚度等丑戊辛辰並之即長闊之較故以厚二寸倍之為帶縱求得闊為

内方邊長為外方邊也

又法以厚二寸倍之得四寸為内方邊與外方邊之較自乘再乘得六十四寸與空心正方體積一千二百一十六寸相減餘一千一百五十二寸三歸之得三百八十四寸以内外方邊之較四寸除之得九十六寸為長方面積以内外方邊之較四寸為長闊之較用帶縱較數開平方法算之得闊八寸即内方邊

加較四寸得一尺二寸即外方邊也如
圖甲乙丙丁戊己庚辛空心正方體以
戊己庚辛空心小正方形移置乙角之
一隅則空心正方體變為甲戊辛庚丙
丁壬磬折體形其甲戊即磬折體之厚
為甲乙外方邊與戊己內方邊之較依
開立方次商法分之得癸子丑三方廉
體寅卯辰三長廉體巳一小隅體以甲
戊厚度自乘再乘得巳一小隅體與共

積相減餘三方廉體三長廉體三歸之則餘癸一方廉體寅一長廉體共成午甲乙庚未申一扁方體其午甲厚與甲戊等以午甲厚除午甲乙庚未申扁方體則得甲乙庚未之長方面形甲戊即長闊之較故用帶縱較數開平方法算之得乙庚闊與戊乙等即空心方體之內方邊以甲戊與戊乙相加得甲乙即空心方體之外方邊也

設如大小兩正方體大正方體比小正方體每邊多四寸積多二千三百六十八寸問大小兩正方邊各幾何

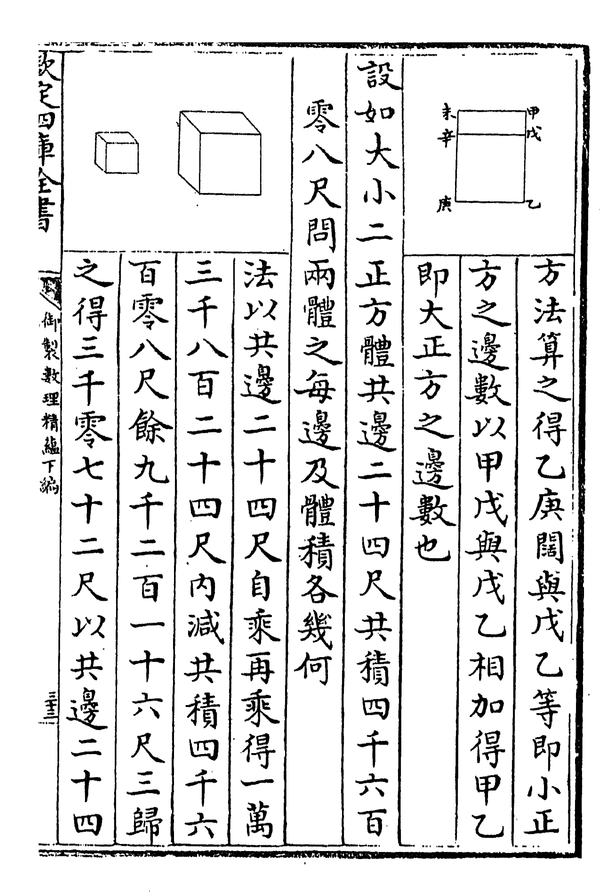
丁　甲　丙　乙

法以大正方邊比小正方邊所多之較四寸自乘再乘得六十四寸與大正方體比小正方體所多之積二千三百六十八寸相減餘二千三百零四寸三歸之得七百六十八寸以邊較四寸除之得一百九十二寸為長方面積乃以邊

較四尺為長闊之較用帶縱較數開平方法算之得闊十二尺即小正方之邊數加較四尺得十六尺即大正方之邊數也如圖甲乙丙丁一大正方體戊己庚辛一小正方體試於甲乙丙丁大正方體減去戊己庚辛小正方體餘壬甲戊辛庚丙丁三面磬折體形即大正方積比小正方積所多之較甲戊為磬折體之厚即大正方邊比小正方邊所多

之較此三面磬折體形依開立方次商法分之則得癸子丑三方廉體寅卯辰三長廉體巳一小隅體以甲戊邊較自乘再乘得巳一小隅體與磬折體積相減餘三方廉體三長廉體三歸之則得癸一方廉體寅一長廉體共成午甲乙庚未申一扁方體其午甲厚與甲戊等以午甲厚除之則得甲乙庚未之長方面形甲戊即長闊之較故用帶縱開平

方法算之得乙庚闊與戊乙等即小正方之邊數以甲戊與戊乙相加得甲乙即大正方之邊數也



設如大小二正方體共邊二十四尺共積四千六百零八尺問兩體之每邊及體積各幾何

法以共邊二十四尺自乘再乘得一萬三千八百二十四尺內減共積四千六百零八尺餘九千二百一十六尺三歸之得三千零七十二尺以共邊二十四

尺除之得一百二十八尺為長方面積乃以共邊二十四尺為長闊和用帶縱和數開平方法算之得闊八尺即小正方之邊數與共邊二十四尺相減餘十六尺即大正方之邊數也如圖甲乙丙丁一大正方體戊己庚辛一小正方體以共邊二十四尺自乘再乘則成壬乙癸子一總正方體內減甲乙丙丁與戊己庚辛大小兩正方體之共積餘丑寅

卯三方廉體辰巳午三長廉體三歸之則得丑一方廉體辰一長廉體共成未壬乙丙戊申一扁方體用壬乙共邊除之則得未壬戊申之長方面形其未壬闊與壬甲等其壬戊長與甲乙等故以壬乙共邊為長闊和用帶縱和數開平方法算之得未壬闊即小正方之邊數與長闊和相減餘壬戊長即大正方之邊數也

御製數理精蘊下編卷二十五

欽定四庫全書

子部

御製數理精蘊下編卷二十六 七

詳校官欽天監博士臣張天樞

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官檢討臣何思鈞

校對官教習臣倪廷梅

謄録監生臣婁業耀

繪圖監生臣周濬

欽定四庫全書

御製數理精蘊下編卷二十六

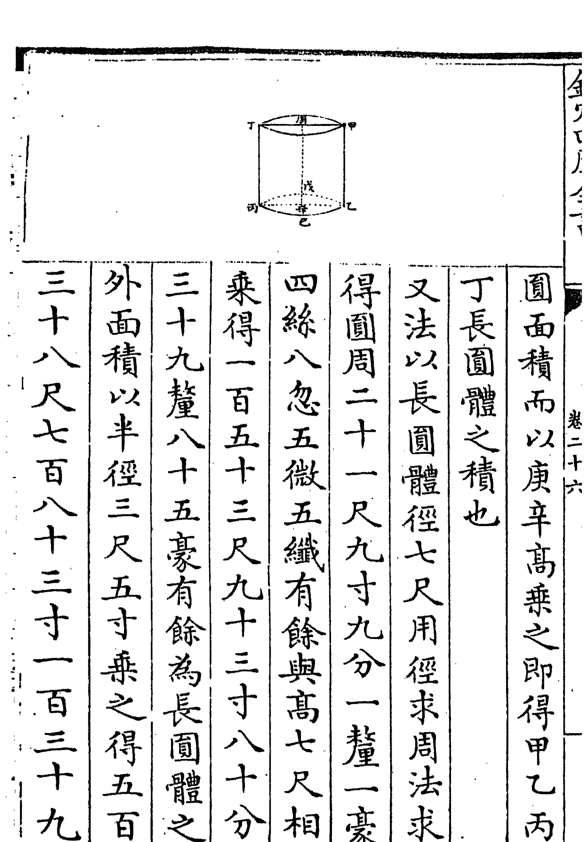
體部四

曲線體

曲線體

設如長圓體徑與高皆七尺問積幾何

法以長圓體徑七尺用求圓面積法求得圓面積三十八尺四十八寸四十五分零九釐九十六豪二十五絲有餘以高七尺乘之得二百六十九尺三百九十一寸五百六十九分七百三十七釐有餘即長圓體之積也如圖甲乙丙丁長圓體先以乙丙底徑求得乙己丙戊



圓面積而以庚辛高乘之即得甲乙丙丁長圓體之積也

又法以長圓體徑七尺用徑求周法求得圓周二十一尺九寸九分一釐一毫四絲八忽五微五纖有餘與高七尺相乘得一百五十三尺九十三寸八十分三十九釐八十五毫有餘為長圓體之外面積以半徑三尺五寸乘之得五百三十八尺七百八十三寸一百三十九

分四百七十五釐有餘折半得二百六十九尺三百九十一寸五百六十九分七百三十七釐有餘即長圓體之積也

如圖甲乙丙丁長圓體先求得乙巳丙戊圓周與甲乙高相乘得甲乙丙丁外面積為底以庚甲半徑乘之得庚甲丙辛長方體為甲乙丙丁長圓體積之二倍益因長圓體之外面積與長方體之底面積等而長圓體之半徑又與長方

丁　甲
丙　乙

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　七八五三九八一六三
三率　三四三
四率　二六九三九一五六九九〇九

體之高度等則長圓體為長方體之一半見幾何原本五卷第二十四節故折半即得甲乙丙丁長圓體之積也

又法用長方體長圓體之定率比例以長方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率長圓體積七八五三九八一六三為二率今所設之長圓體徑七尺自乘以高七尺再乘得三百四十三尺為三率求得四率二百六十九尺三百九十

一率 一○○○○○○○○○

二率 七八五三九八一六三

三率 三四三

四率 二六九三九一五六九九○九

一寸五百六十九分九百零九釐有餘即長圓體之積也此法蓋以長方體與長圓體為比例定率之一○○○○○○○○○為長方體積而七八五三九八一六三為長方體同高同徑之長圓體積故以徑自乘高再乘得長方體積彼定率之長方體與長圓體之比即同於今所得之長方體積與所求之長圓體積之比也

設如尖圓體底徑六尺中高六尺問積幾何

法以底徑六尺用求圓面積法求得底面積二十八尺二十七寸四十三分三十三釐八十五毫有餘以高六尺乘之得一百六十九尺六百四十六寸三分一百釐有餘三歸之得五十六尺五百四十八寸六百六十七分七百釐有餘即尖圓體之積也如圖甲乙丙丁戊尖圓體先以乙丁底徑求得乙丙丁戊底

面積以甲己高乘之得庚乙丁辛長圓體為甲乙丙丁戊尖圓體之三倍蓋因上下面平行各體與平底尖體同底同高者其平底尖體皆得上下面平行體之三分之一（見幾何原本五卷第二十三節）故以所得庚乙丁辛長圓體積三歸之即得甲乙丙丁戊尖圓體積也

又法用尖方體尖圓體之定率比例以尖方體積一○○○○○○○○為

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	七八五三九八一六三
三率	七二
四率	五六五四八六六七七三六

一率尖圓體積七八五三九八一六三為二率今所設之尖圓體底徑六尺自乘以高六尺再乘得二百一十六尺三歸之得七十二尺成尖方體積為三率求得四率五十六尺五百四十八寸六百六十七分七百三十六釐有餘即尖圓體之積也蓋尖方體為長方體之三分之一而尖圓體為長圓體之三分之一故尖方體與尖圓體之比即同於長

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	二六一七九九三八八
三率	二一六
四率	五六五四八六六七八〇八

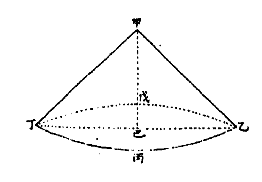
方體與長圓體之比也

又捷法定率比例以長方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率尖圓體積二六一七九九三八八為二率今所設之尖圓體底徑六尺自乘以高六尺再乘得二百一十六尺為三率求得四率五十六尺五百四十八寸六百六十七分八百零八釐有餘即尖圓體之積也此法蓋以長方體與尖圓體為比例長方

體積為一〇〇〇〇〇〇〇〇〇則長圓體積為七八五三九八一六三將此長圓體積三歸之則得尖圓體積為二六一七九九三八八故定率之長方體與尖圓體之比即同於令底徑自乘高再乘所得之長方體積與所求之尖圓體積之比也

一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	二六一七九九三八八
三率	二六
四率	五六五四八六六七〇八

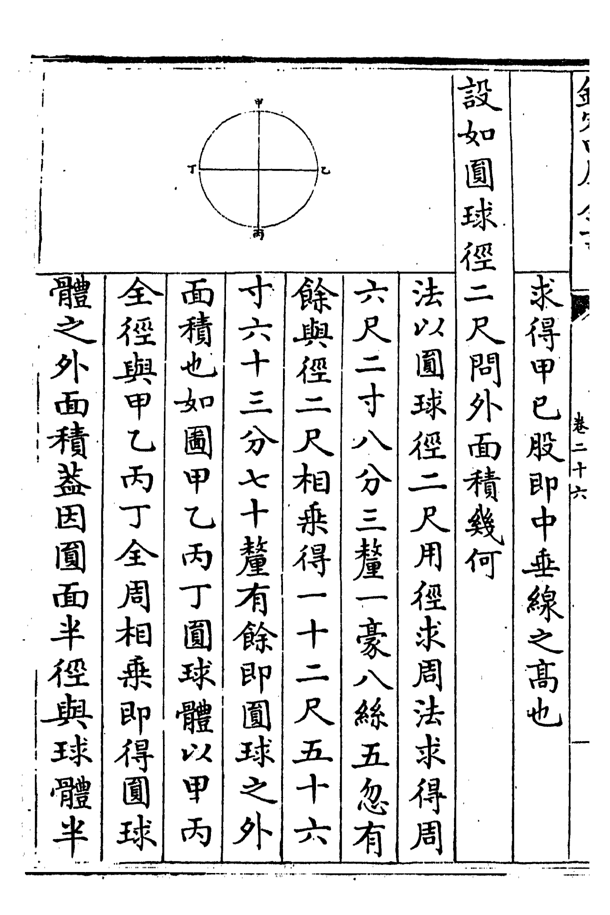
設如尖圓體底周二十二尺自尖至底周之斜線五尺求中垂線之高幾何



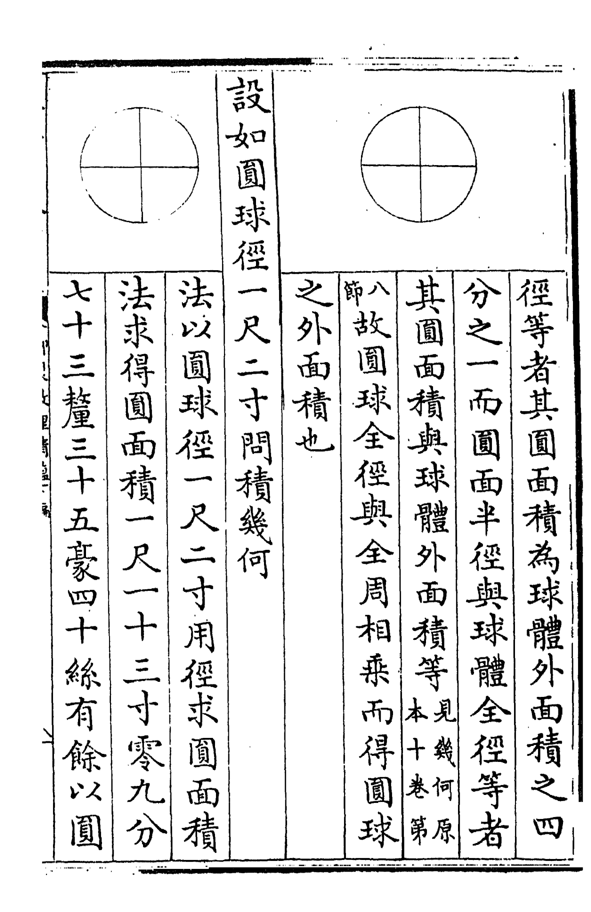
法以底周二十二尺用周求徑法求得底徑七尺零二釐八豪一絲七忽有餘折半得半徑三尺五寸零一釐四豪零八忽有餘為勾以自尖至底周之斜線五尺為弦求得股三尺五寸六分九釐三豪三絲三忽有餘即中垂線之高也如圖甲乙丙丁戊尖圓體以乙丙丁戊底周求得乙丁底徑折半得乙巳半徑為勾以自尖至底周之甲乙斜線為弦

求得甲巳股即中垂線之高也

設如圓球徑二尺問外面積幾何



法以圓球徑二尺用徑求周法求得周六尺二寸八分三釐一豪八絲五忽有餘與徑二尺相乘得一十二尺五十六寸六十三分七十釐有餘即圓球之外面積也如圖甲乙丙丁圓球體以甲丙全徑與甲乙丙丁全周相乘即得圓球體之外面積葢因圓面半徑與球體半



徑等者其圓面積為球體外面積之四分之一而圓面半徑與球體全徑等者其圓面積與球體外面積等見幾何原本十卷第八節故圓球全徑與全周相乘而得圓球之外面積也

設如圓球徑一尺二寸問積幾何

法以圓球徑一尺二寸用徑求圓面積法求得圓面積一尺一十三寸零九分七十三釐三十五毫四十絲有餘以圓

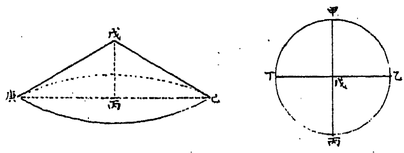


球徑一尺二寸乘之得一尺三百五十七寸一百六十八分零二十四釐有餘為長圓體積三歸之得四百五十二寸三百八十九分三百四十一釐有餘倍之得九百零四寸七百七十八分六百八十二釐有餘即圓球之體積也如圖甲乙丙丁圓球體求得戊己庚辛平圓面積以甲丙全徑乘之得與圓球同徑同高之壬戊庚癸長圓體此球體之乙

丁全徑與長圓體之戊庚底徑度等而球體之甲丙全徑又與長圓體之壬戊高度等則球體積為長圓體積之三分之二（見幾何原本十卷第九節）試以圓球同徑之平圓面積為底圓球之半徑為高作一甲乙丁尖圓體則其積為甲乙丁半球體積之半夫尖圓體與長圓體同底同高其比例為三分之一而尖圓體又為半球體之二分之一則半球體必為半長

圓體之三分之二半球體既為半長圓體之三分之二則全球體必為全長圓體之三分之二可知故以所得壬戊庚癸長圓體積三歸倍之即得甲乙丙丁圓球體積也

又法以圓球徑一尺二寸用求圓球之外面積法求得圓球之外面積四尺五十二寸三十八分九十三釐四十一毫六十絲有餘以半徑六寸乘之得二尺



七百一十四寸三百三十六分四十九釐有餘三歸之得九百零四寸七百七十八分六百八十三釐有餘即圜球之體積也如圖甲乙丙丁圜球體先求得外面積乃以此外面積為底戊丙半徑為高作一戊已庚尖圓體其體積必與圜球體積等葢尖圓體之底面積與球體之外面積等尖圓體之高度與球體之半徑等則其體積亦必等見幾何原本五卷第

甲 乙 丙 丁 戊

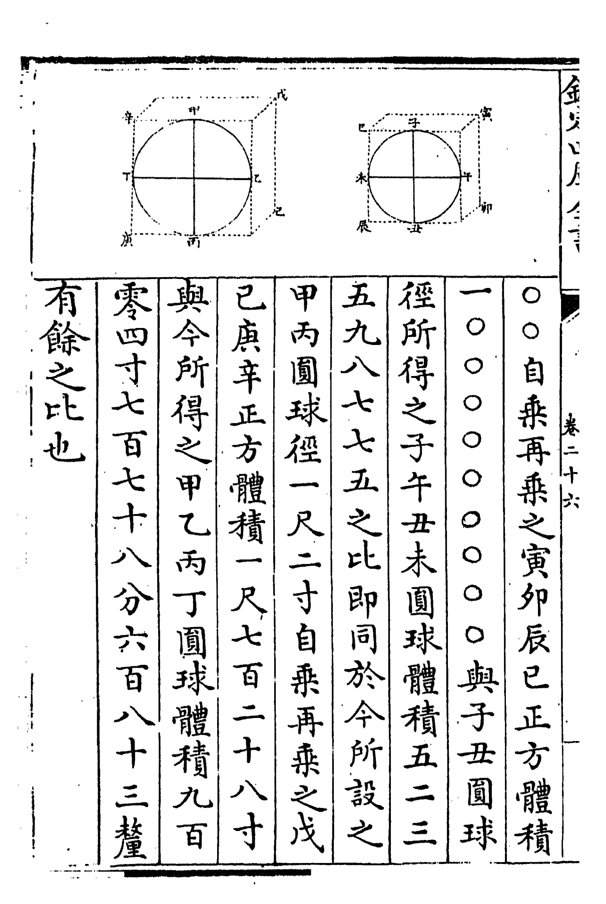
一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　五二三五九八七七五
三率　一七二八
四率　九〇四七七六八三

二十五節故以戊丙半徑與外面積相乘三歸之即如得戊己庚尖圜體積而為甲乙丙丁圓球體積也

又法以方邊球徑相等方積球積不同之定率比例以方積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率球積五二三五九八七七五為二率今所設之圓球徑一尺二寸自乘再乘得一尺七百二十八寸為三率求得四率九百零四寸七百七十

巳 子 寅
未 午
辰 丑 卯

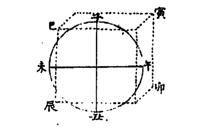
八分六百八十三釐有餘即圓球之體積也此法葢因圓球徑與正方邊相等而圓球積與正方積不同故以圓球徑自乘再乘作正方積為體與體之比例如子丑圓球徑為一〇〇〇則其自乘再乘之寅夘辰巳正方體積為一〇〇〇〇〇〇〇〇而圓球徑一〇〇〇所得之子午丑未圓球體積為五二三五九八七七五故以子丑圓球徑一〇



○○自乘再乘之寅卯辰巳正方體積一○○○○○○○○○與子丑圓球徑所得之子午丑未圓球體積五二三五九八七七五之比即同於今所設之甲丙圓球徑一尺二寸自乘再乘之戊巳庚辛正方體積一尺七百二十八寸與今所得之甲乙丙丁圓球體積九百零四寸七百七十八分六百八十三釐有餘之比也

一率 一〇〇〇〇〇〇〇〇
二率 八〇五九九五九七
三率 三
四率 九六七一九五一六

又法用球積方積相等球徑方邊不同之定率比例以圓球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率正方邊八〇五九九五九七為二率今所設之圓球徑一尺二寸為三率求得四率九寸六分七釐一毫九絲五忽一微六纖有餘為與圓球積相等之正方體每邊之數自乘再乘得九百零四寸七百七十八分六百四十九釐有餘即圓球之體積也此法葢



以圓球積與正方積設為相等使圓球徑與正方邊不同先定為線與線之比例既得線而後自乘再乘之為體也如子丑圓球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇其所得之體積開立方則得八〇五九九五九七即為寅夘辰巳正方體之每一邊是子午丑未圓球積與寅夘辰巳正方積相等故子丑圓球徑一〇〇〇〇與寅夘正方邊八〇五九九

一率 三

二率 一

三率 一七二八

四率 九〇五四二八五七

五九七之比即同於今所設之甲丙圓球徑一尺二寸與今所得之戊已正方邊九寸六分七釐一豪九絲五忽一微六纖有餘之比既得戊已正方邊自乘再乘得戊已庚辛正方體積即與甲乙丙丁圓球體積為相等也

又法以二十一分為一率十一分為二率今所設之圓球徑一尺二寸自乘再乘得一尺七百二十八寸為三率求得

四率九百零五寸一百四十二分八百五十七釐有餘為圓球之體積也葢以正方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇圓球體積五二三五九八七七五之定率約之則正方體積二十一而圓球體積得一〇九九有餘進而為十一則圓球體積稍大故今所得之圓球體積亦稍大也

設如圓球積六尺問徑幾何

一率 一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率 一九〇九八五九三七
三率 六
四率 一一四五九一五五九〇二

法用球徑方邊相等球積方積不同之定率比例以球積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率方積一九〇九八五九三一七為二率今所設之圓球積六尺為三率求得四率十一尺四百五十九寸一百五十五分九百零二釐有餘為與圓球徑相等之正方邊之正方體積開立方得二尺二寸五分四釐五豪零二忽有餘即圓球之徑也蓋圓球積為五

二三五九八七七五則正方積為一〇〇〇〇〇〇〇〇若圓球積為一〇〇〇〇〇〇〇〇〇則正方積為一九〇九八五九三一七其比例仍同故以圓球積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率者即如以圓球積五二三五九八七七五為一率而以正方積一九〇九八五九三一七為二率者即如以正方積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為二率也

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　一二四〇七〇〇九八
三率　一八一七一三〇
四率　二二五四五〇二

又法用球積方積相等球徑方邊不同之定率比例以方邊一〇〇〇〇〇〇〇為一率球徑一二四〇七〇〇九八為二率今所設之圓球積六尺開立方得一尺八寸一分七釐一豪二絲有餘為三率求得四率二尺二寸五分四釐五豪零二忽有餘即圓球之徑也此法亦以圓球積與正方積設為相等使圓球徑與正方邊不同故以圓球積開

立方得立方邊為線與線之比例葢方邊為八〇五九九五九七則球徑為一〇〇〇〇〇〇〇〇若方邊為一〇〇〇〇〇〇〇〇則球徑為一二四〇七〇〇九八其比例仍同故以方邊一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率者即如以方邊八〇五九九五九七為一率而以球徑一二四〇七〇〇九八為二率者即如以球徑一〇〇〇〇〇〇〇〇為二

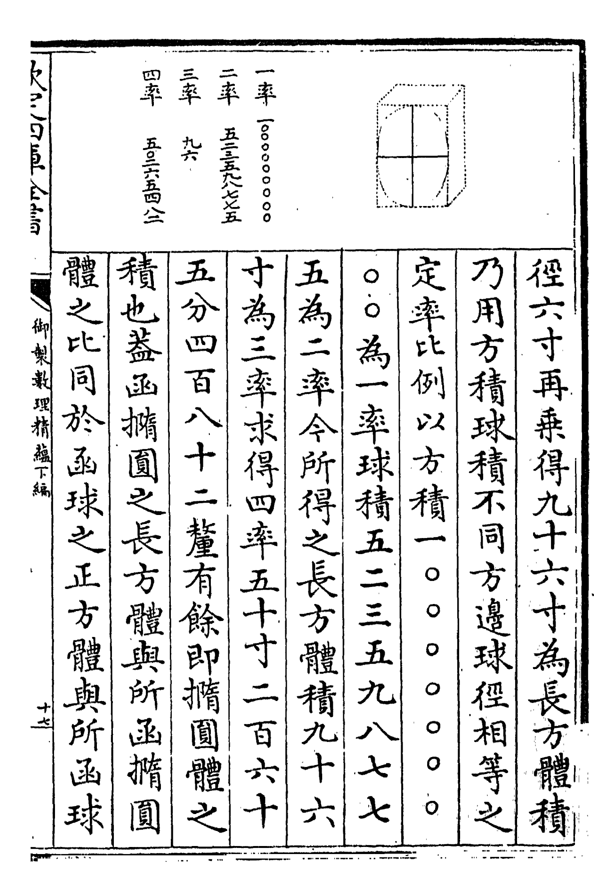
率也

設如撱圓體大徑六寸小徑四寸問積幾何

法以小徑四寸用徑求圓面積法求得圓面積一十二寸五十六分六十三釐七十毫六十絲有餘以大徑六寸乘之得七十五寸三百九十八分二百二十三釐有餘為長圓體積三歸之得二十五寸一百三十二分七百四十一釐有餘倍之得五十寸二百六十五分四百

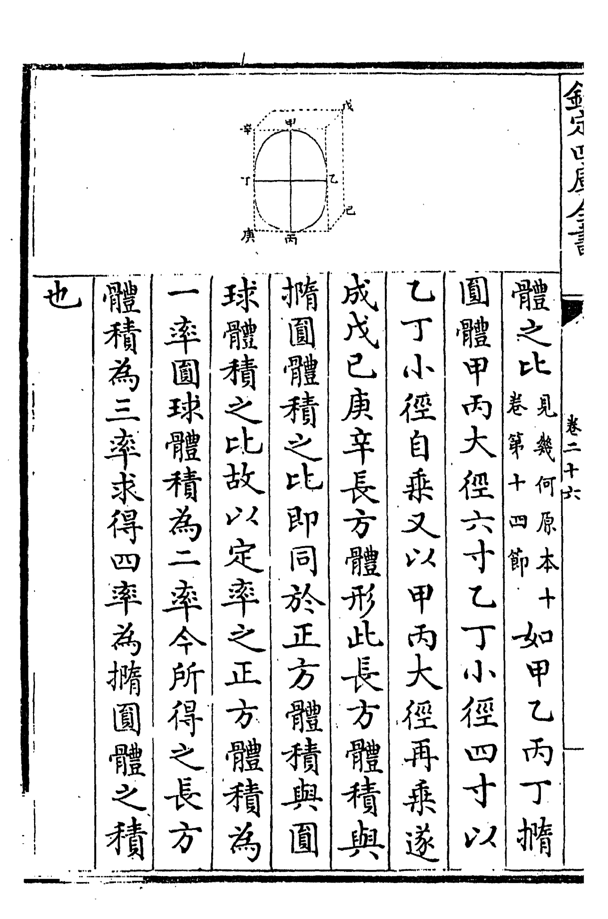
八十二釐有餘即撱圓體之積也如圖甲乙丙丁撱圓體以乙丁小徑求得戊己庚辛平圓面積再以甲丙大徑乘之得壬戊庚癸長圓體此撱圓體積即為長圓體積之三分之二亦如圓球體積為同徑同高之長圓體積之三分之二故以所得壬戊庚癸長圓體積三歸倍之即得甲乙丙丁撱圓體積也

又法以小徑四寸自乘得十六寸以大



一率	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率	五二三五九八七七五
三率	九六
四率	五〇二六五四八二

徑六寸再乘得九十六寸為長方體積乃用方積球積不同方邊球徑相等之定率比例以方積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率球積五二三五九八七七五為二率令所得之長方體積九十六寸為三率求得四率五十寸二百六十五分四百八十二釐有餘即撱圓體之積也蓋函撱圓之長方體與所函撱圓體之比同於函球之正方體與所函球



體之比見幾何原本十卷第十四節如甲乙丙丁撱圓體甲丙大徑六寸乙丁小徑四寸以乙丁小徑自乘又以甲丙大徑再乘遂成戊己庚辛長方體形此長方體積與撱圓體積之比即同於正方體積與圓球體積之比故以定率之正方體積為一率圓球體積為二率今所得之長方體積為三率求得四率為撱圓體之積也

設如擠圓體積五十寸大徑比小徑多二寸問大小徑各幾何

法用方積球積不同方邊球徑相等之定率比例以球積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率方積一九〇九八五九三一七為二率今所設之擠圓體積五十寸為三率求得四率九十五寸四百九十二分九百六十五釐八百五十毫有餘為長方體積乃以大徑比小徑多二

寸為長與濶之較用帶一縱開立方法算之得濶三寸九分九釐二毫有餘即撱圓體之小徑加大徑比小徑多二寸得五寸九分九釐二毫有餘即撱圓體之大徑也如圖甲乙丙丁撱圓體用球積與方積之定率比例即成戊己庚辛長方體形其戊己長即甲丙大徑壬庚濶即乙丁小徑甲丙大徑比乙丁小徑多二寸即長濶之較故用帶一縱開立

方法算之得濶為橢圓體之小徑得長為橢圓體之大徑也

設如上下不等圓面體上徑四尺下徑六尺高八尺問積幾何

法以上徑四尺用徑求圓面積法求得上圓面積一十二尺五十六寸六十三分七十釐六十豪有餘又以下徑六尺用徑求圓面積法求得下圓面積二十八尺二十七寸四十三分三十三釐八

十五豪有餘又以上徑四尺與下徑六尺相乘得二十四尺開方得中徑四尺八寸九分八釐九豪七絲九忽四微八纖有餘用徑求圓面積法求得中圓面積一十八尺八十四寸九十五分五十五釐八十五豪有餘三數相併得五十九尺六十九寸二分六十釐三十豪有餘與高八尺相乘得四百七十七尺五百二十二寸八十二分四百釐有餘三

歸之得一百五十九尺一百七十四寸二十七分四百六十六釐有餘即上下不等圓面體之積也葢上下不等圓面體立法與上下不等正方體同理但上下不等正方體上下俱係方面故求得上中下三方面積相併與高相乘三歸之而得體積此上下俱係圓面故求得上中下三圓面積相併與高相乘三歸之而得體積也

又法以上徑四尺與下徑六尺相減餘二尺折半得一尺為一率高八尺為二率下徑六尺折半得三尺為三率求得四率二十四尺為上下不等圓面體上補成一尖圓體之共高乃以下徑六尺用徑求圓面積法求得圓面積二十八尺二十七寸四十三分三十三釐八十五豪有餘與所得共高二十四尺相乘得六百七十八尺五百八十四寸一十

二分四百釐有餘三歸之得二百二十六尺一百九十四寸六百七十分八百釐有餘為大尖圓體之積又以高八尺與共高二十四尺相減餘十六尺為上尖圓體之高以上徑四尺用徑求圓面積法求得圓面積一十二尺五十六寸六十三分七十釐六十豪有餘與上高十六尺相乘得二百零一尺六十一寸九百二十九分六百釐有餘三歸之得

六十七尺二十寸六百四十三分二百甐有餘為上小尖圓體之積與大尖圓體積二百二十六尺一百九十四寸六百七十分八百甐有餘相減餘一百五十九尺一百七十四寸二十七分六百甐有餘即上下不等圓面體之積也如圖甲乙丙丁上下不等圓面體如戊甲丁小尖圓體遂成戊乙丙大尖圓體故於戊乙丙大尖圓體積内減去戊甲丁

一率 一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

二率 七八五三九八一六三

三率 二〇二六六六六六六六六

四率 一五九一七四〇二七七〇一

小尖圓體積而得甲乙丙丁上下不等圓面體之積也

又法用上下不等正方體與上下不等圓面體之定率比例以正方體積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率圓面體積七八五三九八一六三為二率上徑四尺自乘下徑六尺自乘上徑四尺與下徑六尺相乘三數相併以高八尺乘之得六百零八尺三歸之得二百零二尺

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　七八五三九八一六三
三率　二三一六六六六六六六
四率　一五九一七四〇二七〇一

六百六十六寸六百六十六分六百六十六釐有餘成上下不等正方體積為三率求得四率一百五十九尺一百七十四寸二十七分七百零一釐有餘即上下不等圓面體之積也

又捷法定率比例以一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率二六一七九九三八八為二率上徑四尺相乘下徑六尺自乘上徑四尺與下徑六尺相乘三數相併

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　二六一七九九三八
三率　六〇八
四率　一五九一七四〇二七九〇〇

以高八尺乘之得六百零八尺為三率求得四率一百五十九尺一百七十四寸二十七分九百釐有餘即上下不等圓面體之積也此法葢以三上下不等正方體與一上下不等圓面體為比例夫一上下不等正方體積為一〇〇〇〇〇〇〇〇則一上下不等圓面體積為七八五三九八一六三若三上下不等正方體積為一〇〇〇〇〇〇〇

○○則一上下不等圓面體積為二六一七九九三八八故以上徑自乘下徑自乘上下徑相乘三數相併以高乘之所得為三上下不等正方體積彼定率之三上下不等正方體與一上下不等圓面體之比即同於今所得之三上下不等正方體積與所求之一上下不等圓面體積之比也

設如上下不等撱圓面體上大徑四尺小徑三尺下

大徑八尺小徑六尺高十尺問積幾何

法以上大徑四尺與上小徑三尺相乘得一十二尺以下大徑八尺與下小徑六尺相乘得四十八尺又以上大徑四尺與下小徑六尺相乘下大徑八尺與上小徑三尺相乘共得四十八尺折半得二十四尺三數相併得八十四尺乃用方積圓積之定率比例以方積一〇〇〇〇〇〇〇為一率圓積七八

一率 一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率 七八五三九八一六三
三率 八四
四率 六三一九七二三四四五九九

五三九八一六三為二率三數相併之八十四尺為三率求得四率六十五尺九十七寸三十四分四十五釐六十九豪有餘與高十尺相乘得六百五十九尺七百三十四寸四百五十六分九百釐有餘三歸之得二百一十九尺九百一十一寸四百八十五分六百三十三釐有餘即上下不等撱圓面體之積也

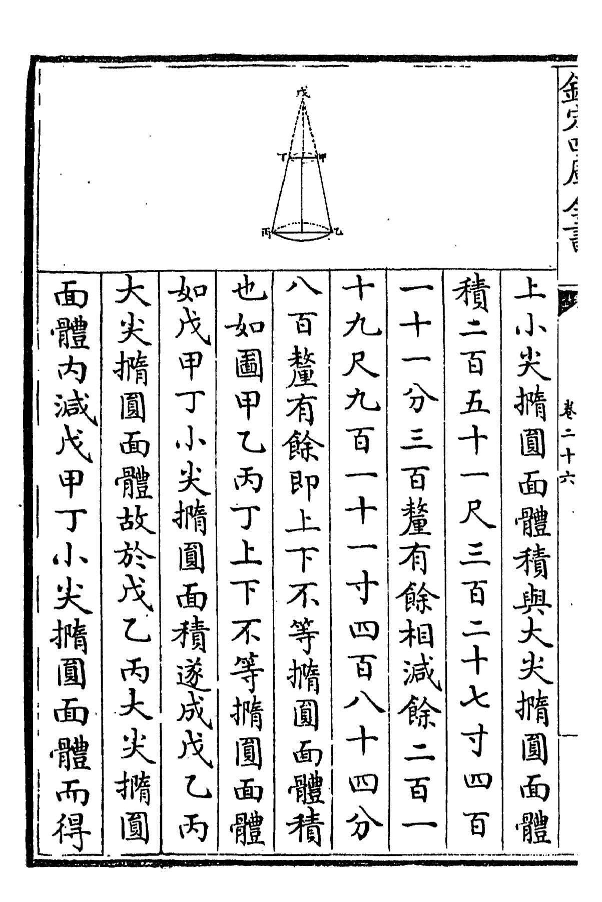
若上下不等撱圓面體立法與上下不

等圓面體同但上下不等圓面體上下俱係圓面故求得上中下三圓面積相併與高相乘三歸之而得體積此上下俱係撱圓面故必求得上中下三長方面積相併用定率比例得三撱圓面積乃與高相乘三歸之而得體積也

又法以上大徑四尺與下大徑八尺相減餘四尺折半得二尺為一率高十尺為二率下大徑八尺折半得四尺為三

率求得四率二十尺為上下不等撱圓面體上補成一尖撱圓體之共髙乃以下大徑八尺小徑六尺用求撱圓面積法求得下撱圓面積三十七尺六十九寸九十一分一十一釐六十八毫有餘與所得共髙二十尺相乘得七百五十三尺九百八十二寸二百三十三分六百釐有餘三歸之得二百五十一尺三百二十七寸四百一十一分三百釐有

餘為大尖撱圓面體之積又以高十尺與共高二十尺相減餘十尺為上小尖撱圓面體之高以上大徑四尺小徑三尺用求撱圓面積法求得上撱圓面積九尺四十二寸四十七分七十七釐九十二毫有餘與上高十尺相乘得九十四尺二百四十七寸七百七十九分二百釐有餘三歸之得三十一尺四百一十五寸九百二十六分四百釐有餘為



上小尖擶圓面體積與大尖擶圓面體積二百五十一尺三百二十七寸四百一十一分三百釐有餘相減餘二百一十九尺九百一十一寸四百八十四分八百釐有餘即上下不等擶圓面體積也如圖甲乙丙丁上下不等擶圓面體如戊甲丁小尖擶圓面積遂成戊乙丙大尖擶圓面體故於戊乙丙大尖擶圓面體內減戊甲丁小尖擶圓面體而得

一率　一○○○○○○○○○
二率　七八五三九八一六三
三率　二八○
四率　二九三四八五六四○

甲乙丙丁上下不等撱圓面體之積也
又法用上下不等長方體與上下不等
撱圓面體之定率比例以長方體積一
○○○○○○○○○為一率長圓體
積七八五三九八一六三為二率以上
大徑四尺倍之加下大徑八尺共一十
六尺與上小徑三尺相乘得四十八尺
以下大徑八尺倍之加上大徑四尺共
二十尺與下小徑六尺相乘得一百二

一率 一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率 七八五三九八一六三
三率 二八〇
四率 二一九九一一四八五六四〇

十尺兩數相併得一百六十八尺以高十尺乘之得一千六百八十尺六歸之得二百八十尺成上下不等長方體積為三率求得四率二百一十九尺九百一十一寸四百八十五分六百四十釐有餘即上下不等撱圓面體之積也蓋長方面積與撱圓面積之比同於方面積與圓面積之比故上下不等長方體與上下不等撱圓面體之比即同於長

一率 一〇〇〇〇〇〇〇〇

二率 一三〇八九九六九四

三率 一六八〇

四率 二一九九一一四八五九二〇

方體與長圓體之比也

又捷法定率比例以一〇〇〇〇〇〇〇〇〇為一率一三〇八九九六九四為二率以上大徑四尺倍之加下大徑八尺共一十六尺與上小徑三尺相乘得四十八尺以下大徑八尺倍之加上大徑四尺共二十尺與下小徑六尺相乘得一百二十尺兩數相併得一百六十八尺以高十尺乘之得一千六百八

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　一三〇八九九六九四
三率　一六八〇
四率　二一九九一一四八五九二〇

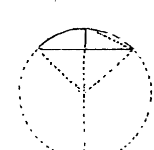
十尺為三率求得四率二百一十九尺九百一十一寸四百八十五分九百二十釐有餘即上下不等撱圜面體之積也此法葢以六上下不等長方體與一上下不等撱圜面體為比例夫一上下不等長方體積為一〇〇〇〇〇〇〇〇〇則一上下不等撱圜面體積為七八五三九八一六三若六上下不等長方體積為一〇〇〇〇〇〇〇〇〇則

一上下不等撱圓面體積為一三〇八九九六九九四故以上大徑倍之加下大徑與上小徑相乘以下大徑倍之加上大徑與下小徑相乘兩數相併以高乘之所得為六上下不等長方體積彼定率之六上下不等長方體積與一上下不等撱圓面體積之比即同於今所得之六上下不等長方體積與所求之一上下不等撱圓面體積之比也

設如截球體一段高二寸底徑九寸六分問積幾何

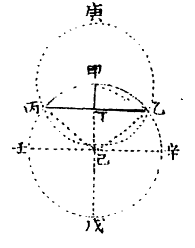
法以高二寸為首率底徑九寸六分折半得四寸八分為中率求得末率一尺一寸五分二釐為圓球之截徑加高二寸得一尺三寸五分二釐為圓球之全徑折半得六寸七分六釐為圓球之半徑又以高二寸為勾底徑九寸六分折半得四寸八分為股求得弦五寸二分作平圓半徑用求圓面積法求得平圓

面積八十四寸九十四分八十六釐有餘即為截球體一段之外面積與圓球半徑六寸七分六釐相乘得五百七十四寸二百五十二分五百三十六釐有餘三歸之得一百九十一寸四百一十七分五百一十二釐有餘為自圓球中心所分球面尖圓體積又以截球體底徑九寸六分用求平圓面積法求得截球體之底面積七十二寸三十八分二



十二釐有餘於圓球半徑六寸七分六釐内減去截球體之高二寸餘四寸七分六釐與截球體之底面積七十二寸三十八分二十二釐有餘相乘得三百四十四寸五百三十九分二百七十二釐有餘三歸之得一百一十四寸八百四十六分四百二十四釐有餘為自圓球中心至截球體底徑所分平面尖圓體積與球面尖圓體積一百九十一寸

四百一十七分五百一十二釐有餘相減餘七十六寸五百七十一分八十八釐有餘即截球體一段之積也如圖甲乙丙截球體一段其乙丙底徑即如弧矢形之弦長其甲丁高即如弧矢形之矢濶故甲丁為首率乙丙底徑折半得乙丁為中率求得丁戊末率為截球徑（見各面形弦矢求圓徑法）與甲丁高相加得甲戊為圓球全徑折半得甲巳為圓球半徑又



以甲丁為勾乙丁為股求得甲乙弦乃以甲乙弦為半徑求得庚乙丙平圓面積即與甲乙丙截球體一段之外面積等葢圓面半徑與球體半徑等者其圓面積為球體外面積之四分之一而圓面半徑與球體全徑等者其圓面積與球體外面積等見幾何原本十卷第八節故甲辛戊壬圓球體其外面積為同徑子丑寅卯平圓面積之四倍若甲辛壬半球體其

外面積必為子丑寅卯平圓面積之二倍然則甲巳半徑求得平圓面積又辛巳半徑亦求得平圓面積兩面積相併必與甲辛壬半球體之外面積等矣今甲乙丙截球體一段若以甲丁為半徑求得平圓面積又以乙丁為半徑求得平圓面積兩面積相併亦必與甲乙丙截球體一段之外面積等而甲乙弦自乘之正方與甲丁勾自乘之正方乙丁

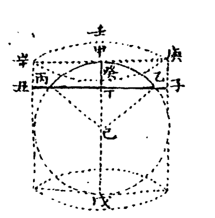
股自乘之正方相併之積等則甲乙弦為半徑所得之圓面積亦必與甲丁勾為半徑所得之圓面積乙丁股為半徑所得之圓面積相併之積等故以甲乙弦為半徑所得之庚乙丙平圓面積即與甲乙丙截球體一段之外面積相等也既得截球體一段之外面積與甲已圓球半徑相乘三歸之得已丙甲乙球面尖圓體積又以乙丙截球體底徑求

得乙丙底面積與丁已截半徑相乘三歸之得已丙丁乙平面尖圓體積與已丙甲乙球面尖圓體積相減所餘即甲乙丙截球體一段之積也

又法先求得圓球徑一尺三寸五分二釐用徑求周法求得圓周四尺二寸四分七釐四豪三絲三忽有餘與截球體一段之高二寸相乘得八十四寸九十四分八十六釐有餘即為截球一段之

外面積與圓球半徑六寸七分六釐相乘得五百七十四寸二百五十二分五百三十六釐三歸之得一百九十一寸四百一十七分五百一十二釐有餘為自圓球中心所分球面尖圓體積又以截球體底徑九寸六分用求平圓面積法求得截球體之底面積七十二寸三十八分二十二釐有餘於圓球半徑六寸七分六釐內減去截球體之高二寸

餘四寸七分六釐與截球體之底面積七十二寸三十八分二十二釐有餘相乘得三百四十四寸五百三十九分二百七十二釐有餘三歸之得一百一十四寸八百四十六分四百二十四釐有餘為自圓球中心至截球徑所分平面尖圓體積與球面尖圓體積一百九十一寸四百一十七分五百一十二釐有餘相減餘七十六寸五百七十一分八



十八釐有餘即截球體一段之積也如圖甲乙丙截球體一段先求得甲戊全徑與庚辛等又求得壬庚癸辛全周與甲丁高相乘得庚子丑辛截長圓體一段之外面積與甲乙丙截球體一段之外面積等蓋球體全徑與長圓體底徑高度相等者其相當每段之外面積皆相等見幾何原本十卷第十一節既得甲乙丙截球體一段之外面積則與甲己半徑相乘

三歸之而得已丙甲乙球面尖圓體積

又以乙丙截球體底面積與丁已截半

徑相乘三歸之而得已丙丁乙平面尖

圓體積與已丙甲乙球面尖圓體積相

減餘即得甲乙丙截球體一段之積也

設如空心圓球積二千寸厚三寸問內外徑數各幾

何

法用球徑方邊相等球積方積不同之

定率比例以球積一○○○○○○

一率 一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

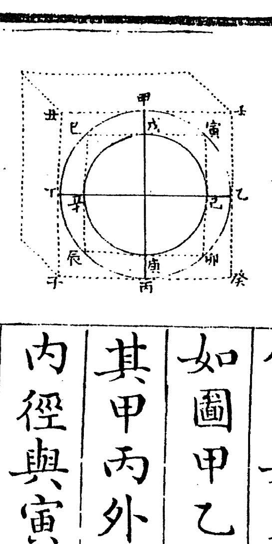
二率 一九〇九八五九三一七

三率 二〇〇

四率 三八一九七一八六三四

〇〇為一率方積一九〇九八五九三一七為二率今所設之空心圓球積二千寸為三率求得四率三尺八百一十九寸七百一十八分六百三十四釐有餘為空心正方體積乃用算空心正方體法以厚三寸自乘再乘得二十七寸八因之得二百一十六寸與所得空心正方體積三尺八百一十九寸七百一十八分六百三十四釐相減餘三尺六

百零三寸七百一十八分六百三十四釐有餘六歸之得六百寸六百一十九分七百七十二釐有餘用厚三寸除之得三尺零二十分六十五釐九十豪為內徑與外徑相乘長方面積乃以厚三寸倍之得六寸為長濶之較用帶縱較數開平方法算之得濶一尺一寸四分六釐三豪九絲七忽有餘即空心圓球內徑得長一尺七寸四分六釐三豪九

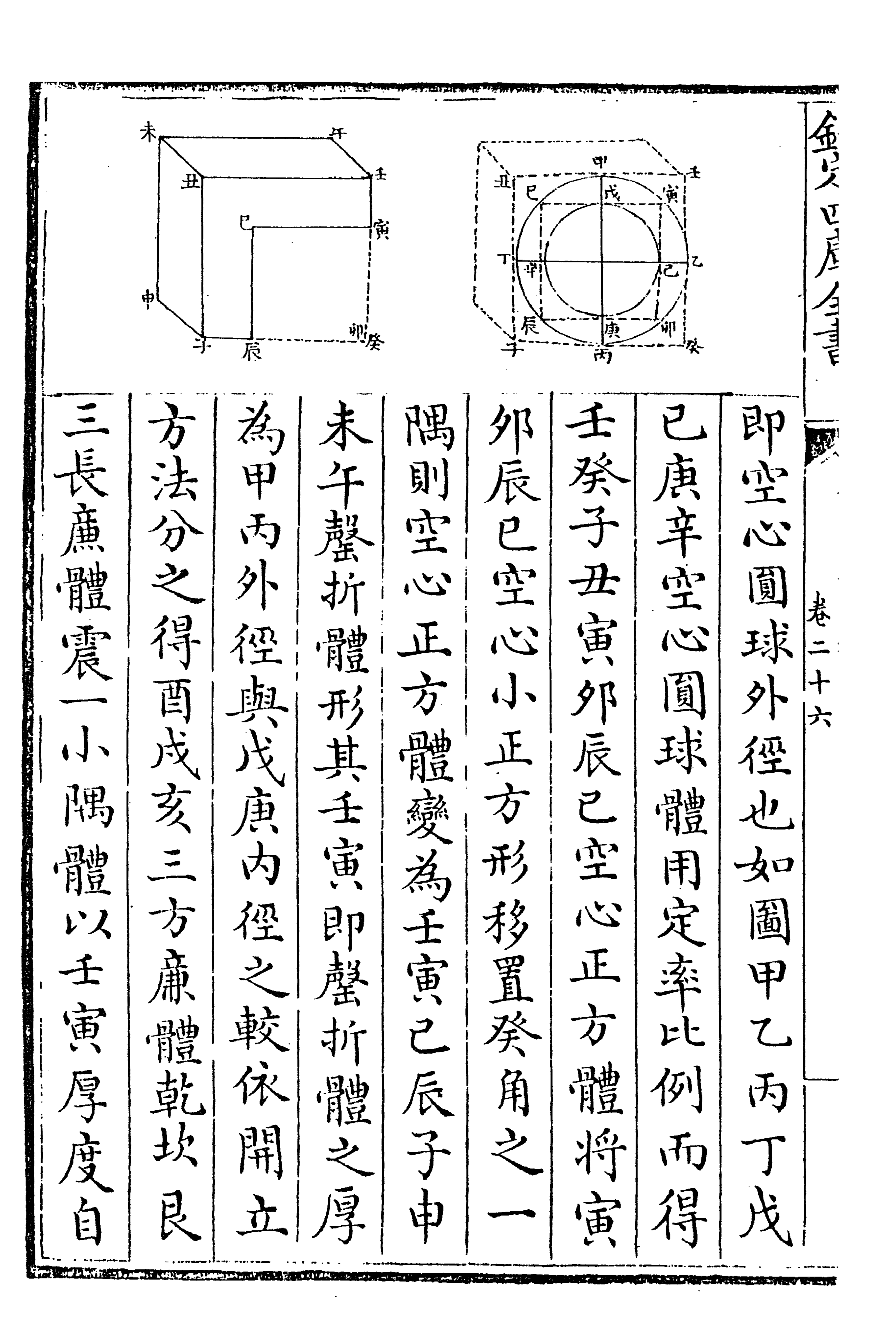


絲七忽有餘即空心圓球外徑也此法蓋以空心圓球體與空心正方體為比例即如用球積與方積定率為比例也如圖甲乙丙丁戊己庚辛空心圓球體其甲丙外徑與壬癸外方邊等其戊庚內徑與寅夘內方邊等是以甲乙丙丁大球體與壬癸子丑大正方體為比戊己庚辛小球體與寅夘辰巳小正方體為比而空心圓球體與空心正方體之

比即如球體積與方體積之比也既得空心正方體積則用算空心正方體法以壬酉厚自乘再乘八因之得午巳未申類八小隅體與空心正方體相減則餘空心正方體之六面酉戌坎未類六長方扁體六歸之得酉戌坎未一長方扁體用厚三寸除之得酉戌亥乾一長方面積其酉戌濶與戌庚等即內徑其酉乾長與壬丑等即外徑其酉寅巳乾

皆與壬酉厚度等酉寅巳乾併之即長
濶之較故以厚三寸倍之為帶縱求得
濶為内徑長為外徑也
又法用定率比例求得空心正方體積
以厚三寸倍之得六寸為内方邊與外
方邊之較自乘再乘得二百一十六寸
與所得空心正方體積三尺八百一十
九寸七百一十八分六百三十四釐有
餘相減餘三尺六百零三寸七百一十

八分六百三十四釐有餘三歸之得一尺二百零一寸二百三十九分五百四十四釐有餘以内外方邊之較六寸除之得二尺零二十分六十五釐九十毫有餘為長方面積以内外方邊之較六寸為長濶之較用帶縱較數開平方法算之得闊一尺一寸四分六釐三毫九絲七忽有餘即空心圓球内徑得長一尺七寸四分六釐三毫九絲七忽有餘



即空心圓球外徑也如圖甲乙丙丁戊己庚辛空心圓球體用定率比例而得壬癸子丑寅卯辰巳空心正方體將寅卯辰巳空心小正方形移置癸角之一隅則空心正方體變為壬寅巳辰子申未午磬折體形其壬寅即磬折體之厚為甲丙外徑與戊庚内徑之較依開立方法分之得酉戌亥三方廉體乾坎艮三長廉體震一小隅體以壬寅厚度自

乘再乘得震一小隅體與空心正方體積相減餘三方廉體三長廉體三歸之則餘酉一方廉體乾一長廉體共成巽壬癸辰坤離一扁方體其巽壬厚與壬寅等以巽壬厚除巽壬癸辰坤離扁方體則得壬癸辰坤長方面壬寅即長濶之較故用帶縱較數開平方法算之得夘辰濶與寅癸等即空心圓球之內徑以壬寅與寅癸相加得壬癸與甲丙等

即空心圓球之外徑也

設如圓窖一座周二十四尺高十尺問盛米幾何

法以周二十四尺用圓周求面積法求得圓面積四十五尺八十三寸六十六分二十二釐有餘與高一丈相乘得四百五十八尺三百六十六寸二百二十分有餘為圓窖之積數乃以米一石積數定率二千五百寸為一率一石為二率圓窖體積四百五十八尺三百六十

一率 二千五百寸
二率 一石
三率 四百五十八尺三百六十六寸二百二十分
四率 一百八十三石三斗四升六合四勺

六寸二百二十分有餘為三率求得四率一百八十三石三斗四升六合四勺有餘即所盛之米數也此法與求長圓體積之法同如甲乙丙丁長圓窖以甲戊丁己圓周求得平圓面積用甲乙高乘之即得甲乙丙丁長圓體積既得體積則以一石積數二千五百寸與一石之比同於今所得之體積與今所求之米數之比也

設如圓窖一座盛米一百六十石高十尺問周徑各幾何

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　一二七三二三九五四
三率　四〇
四率　五〇九二九五八一六〇

法以米一石為一率一石積數定率二千五百寸為二率盛米一百六十石為三率求得四率四百尺為圓窖之積數以高十尺除之得四十尺為圓窖之面積乃用圓積方積之定率比例以圓積一〇〇〇〇〇〇〇〇為一率方積一二七三二三九五四為二率今所得之

圓窖面積四十尺為三率求得四率五十尺九十二寸九十五分八十一釐六十毫有餘開平方得七尺一寸三分六釐四毫九絲有餘即圓窖之徑數再用徑求周法求得周二十二尺四寸一分九釐九毫四絲有餘即圓窖之周數也

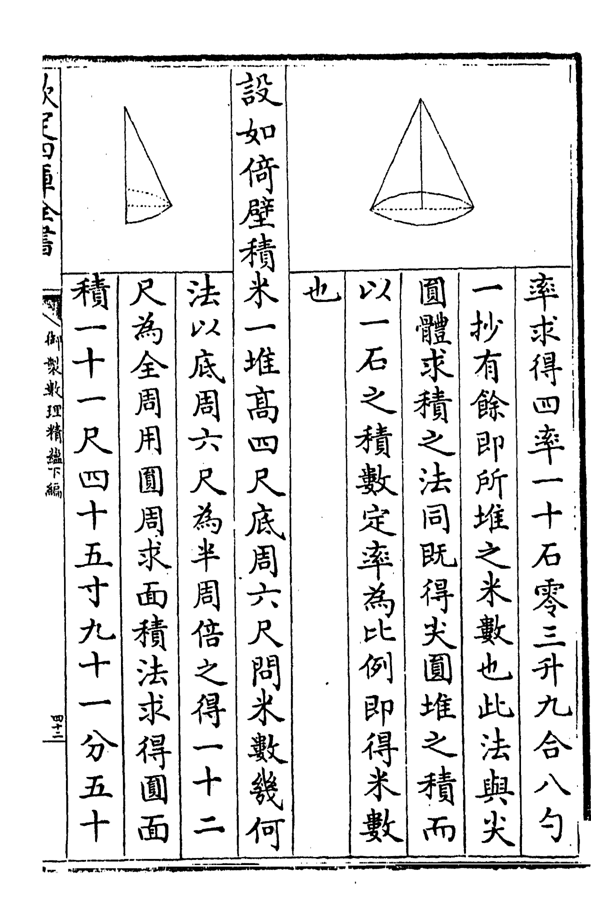
設如積米一堆高五尺底周十四尺問米數幾何

法以底周十四尺用圓周求面積法求得圓面積一十五尺五十九寸七十一

一率 二千五百寸
二率 一石
三率 二十五尺九百九十五寸三百零六分八百二十五釐
四率 十石零三斗九升八合一勺二抄

分八十四釐一十二豪有餘為尖圓堆之底面積與高五尺相乘得七十七尺九百八十五寸九百二十分六百釐有餘三歸之得二十五尺九百九十五寸三百零六分八百二十釐有餘為尖圓堆之積數乃以米一石積數定率二千五百寸為一率一石為二率今所得之尖圓堆之積數二十五尺九百九十五寸三百零六分八百二十釐有餘為三

率求得四率一十石零三升九合八勺一抄有餘即所堆之米數也此法與尖圓體求積之法同既得尖圓堆之積而以一石之積數定率為比例即得米數也



設如倚壁積米一堆高四尺底周六尺問米數幾何

法以底周六尺為半周倍之得一十二尺為全周用圓周求面積法求得圓面積一十一尺四十五寸九十一分五十

一率　二千五百寸
二率　一石
三率　七尺六百三十九寸四百三十六分
四率　三石零五升五合七勺七抄

五釐有餘折半得五尺七十二寸九十五分七十七釐有餘為倚壁尖圓堆之底面積以高四尺乘之得二十二尺九百一十八寸三百零八分有餘三歸之得七尺六百三十九寸四百三十六分有餘為倚壁尖圓堆之積數乃以米一石積數定率二千五百寸為一率一石為二率今所得之倚壁尖圓堆之積數七尺六百三十九寸四百三十六分有

餘為三率求得四率三石零五升五合七勺七抄有餘即倚壁所堆之米數也

葢倚壁尖圓堆即尖圓體之一半故求得平圓面積折半與高數相乘又以三歸之得倚壁尖圓堆之積數而以一石積數為比例即得米數也

設如倚壁內角積米一堆高五尺周一十二尺問米數幾何

法以周一十二尺四因之得四十八尺

為全周用圓周求面積法求得圓面積一百八十十三尺三十四寸六十四分九十釐有餘四歸之得四十五尺八十三寸六十六分二十二釐有餘為倚壁内角尖圓堆之底面積與高五尺相乘得二百二十九尺一百八十三寸一百一十分三歸之得七十六尺三百九十四寸三百七十分為倚壁内角尖圓堆之積數乃以米一石積數定率二千五百

一率　二千五百寸
二率　一石
三率　七十六尺三百九十四寸三百七十分
四率　三十石零五斗五升七合七勺

寸為一率一石為二率今所得之倚壁內角尖圓堆之積數七十六尺三百九十四寸三百七十分為三率求得四率三十石零五斗五升七合七勺有餘即倚壁內角所堆之米數也蓋倚壁內角尖圓堆即尖圓體之四分之一故求得平圓面積四歸之與高數相乘又以三歸之得倚壁內角尖圓堆之積數而以一石積數為比例即得米數也

設如倚壁外角積米一堆高六尺底周三十三尺問米數幾何

法以周三十三尺三歸四因得四十四尺為全周用圓周求面積法求得圓面積一百五十四尺六寸一十九分八十一釐九十二毫有餘四歸三因得一百一十五尺五十四寸六十四分八十八釐四十四毫有餘為倚壁外角尖圓堆之底面積以高六尺乘之得六百九十

一率　二千五百寸
二率　一石
三率　二百三十一尺九十二寸九百七十二分八百八十釐
四率　九十二石四斗三升七合勺秒

三尺二百七十八寸九百一十八分六百四十釐有餘三歸之得二百三十一尺九十二寸九百七十二分八百八十釐有餘即倚壁外角尖圓堆之積數乃以米一石積數定率二千五百寸為一率一石為二率令所得之倚壁外角尖圓堆之積數二百三十一尺九十二寸九百七十二分八百八十釐有餘為三率求得四率九十二石四斗三升七合

一勺八抄有餘即倚壁外角所堆之米數也蓋倚壁外角尖圓堆即尖圓體四分之三故求得平圓面積四歸三因與高數相乘又以三歸之得倚壁外角尖圓堆之積數而以一石積數為比例即得米數也